

ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN GÒ VẤP – Vòng 1 (2015-2016)

Thời gian: 150 phút
(NGÀY THI: 7/11/2015)

Bài 1: (3 điểm) Cho $a + b = 1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3}$

Bài 2: (6 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 9)(9x^2 - 1) = 20x + 1$

b) $\sqrt{\frac{2-2x}{x}} + 5 = 9x$

Bài 3: (3 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a + b \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = a + b + \frac{1}{a} + \frac{9}{b}$$

Bài 4: (3 điểm) Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ 2 đường thẳng vuông góc với nhau. Một đường cắt cạnh AD tại K, đường kia cắt bên ngoài cạnh CD tại L. Gọi F là giao điểm của KL và AC. Chứng minh: $BF \perp KL$

Bài 5: (3 điểm) Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Về phía ngoài $\triangle ABC$ dựng tam giác đều ACD. Chứng minh: $AB^2 + BC^2 = BD^2$

Bài 6: (2 điểm) Trên bảng là một con số. Hai bạn Nhân và Chia cùng chơi một trò chơi như sau: Bạn Nhân, khi đến lượt mình thì đem số trên bảng nhân với 2 và đem kết quả này thay cho số trên bảng; Bạn Chia, khi đến lượt mình đem số trên bảng cộng 1 rồi chia cho 2 và đem kết quả này thay cho số cũ. Ai ra được kết quả bằng 2015 thì người đó thắng. Nhân đi trước, Chia đi sau và sau 2016 lượt chơi (mỗi bạn chơi đúng 2016 lần) thì Chia thắng.

- a) Hỏi số trên bảng lúc đầu là bao nhiêu?
- b) Nếu Chia đi trước thì ai sẽ thắng.

❁ ❁ **HẾT** ❁ ❁

ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN GÒ VẤP - Vòng 1 (2015-2016)
HƯỚNG DẪN

Bài 1: (3 điểm) Cho $a + b = 1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} &= \frac{a^4 - a + b^4 - b}{a^3b^3 - a^3 - b^3 + 1} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - 1}{a^3b^3 - (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 1} = \frac{(1 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 - 1}{a^3b^3 - (1 - 3ab) + 1} \\ &= \frac{-4ab + 2a^2b^2}{a^3b^3 + 3ab} = \frac{2ab - 4}{a^2b^2 + 3} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3} \quad (\text{vì } ab \neq 0) \end{aligned}$$

Bài 2: (6 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 9)(9x^2 - 1) = 20x + 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3)(3x + 1)(3x - 1) = 20x + 1 \Leftrightarrow (3x^2 + 10x + 3)(3x^2 - 10x + 3) = 20x + 1 \\ &\Leftrightarrow (3x^2 + 3)^2 - 100x^2 = 20x + 1 \Leftrightarrow (3x^2 + 3)^2 - (10x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 10x + 4)(3x^2 - 10x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{5}{3} \right)^2 - \frac{13}{9} \right] \left[\left(x - \frac{5}{3} \right)^2 - \frac{19}{9} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{3} \\ x = \frac{5}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{ -\frac{5}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{3}; \frac{5}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \right\}$

b) $\sqrt{\frac{2 - 2x}{x}} + 5 = 9x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2 - 2x}{x}} = 9x - 5 \quad (\text{Điều kiện: } x \geq \frac{5}{9})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 2x}{x} = (9x - 5)^2 \Leftrightarrow 81x^3 - 90x^2 + 27x - 2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 2)(27x^2 - 12x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)(3x - 1)(9x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \text{ (nhận)} \\ x = \frac{1}{3} \text{ (loại)} \\ x = \frac{1}{9} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \quad \text{Vậy } S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

Bài 3: (3 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a+b \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = a + b + \frac{1}{a} + \frac{9}{b}$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương, ta được:

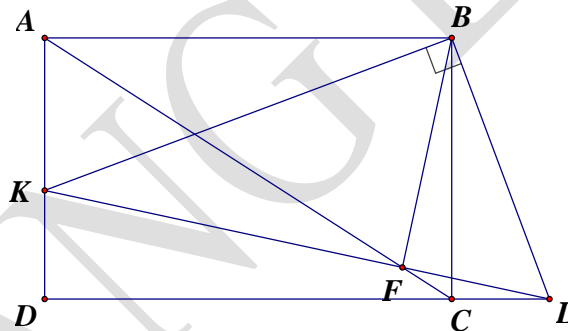
$$\begin{cases} 16a + \frac{1}{a} \geq 8 \\ 16b + \frac{9}{b} \geq 24 \end{cases}$$

Mà $-15(a+b) \geq -15$. Nên $a+b + \frac{1}{a} + \frac{9}{b} \geq 17 \Leftrightarrow P \geq 17$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$

Vậy $P_{\min} = 17$ khi $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$

Bài 4: (3 điểm) Cho hình chữ nhật ABCD. Qua B kẻ 2 đường thẳng vuông góc với nhau. Một đường cắt cạnh AD tại K, đường kia cắt bên ngoài cạnh CD tại L. Gọi F là giao điểm của KL và AC. Chứng minh: $BF \perp KL$



Cách 1:

Chứng minh được: $\triangle ABK \sim \triangle CBL \left(\widehat{ABK} = \widehat{CBK}; \widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ \right) \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL} \Rightarrow \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BL}$

Xét $\triangle BKL$ và $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{cases} \widehat{KBL} = \widehat{ABC} (= 90^\circ) \\ \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{BL} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle BKL \sim \triangle BAC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BLF} = \widehat{BCF}$$

\Rightarrow Tứ giác BFCL nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFL} = \widehat{BCL} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp KL$

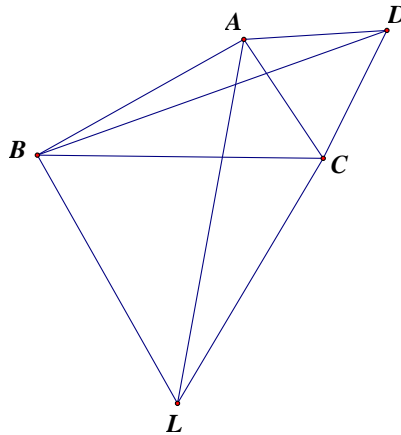
Cách 2:

Ta có: $\triangle ABK \sim \triangle CBL \Rightarrow \triangle KBL \sim \triangle ABC \Rightarrow \widehat{BKL} = \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \triangle HKF \sim \triangle HAB \Rightarrow \frac{HK}{HF} = \frac{HA}{HB} \Rightarrow \triangle AHK \sim \triangle BHF$

$\Rightarrow \widehat{BFK} = \widehat{HFB} + \widehat{HFK} = \widehat{HKA} + \widehat{HBA} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp KL$

Bài 5: (3 điểm) Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Về phía ngoài $\triangle ABC$ dựng tam giác đều ACD . Chứng minh: $AB^2 + BC^2 = BD^2$



Về phía ngoài $\triangle ABC$ dựng tam giác đều $BCL \Rightarrow \widehat{CBL} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABL} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow AL^2 = AB^2 + BL^2$ (Định lý Pytago $\triangle ABL$ vuông tại B)

$$\Rightarrow AL^2 = AB^2 + BC^2 \quad (\text{Vì } BL = BC) \quad (1)$$

Ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{BCL} (= 60^\circ) \Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \widehat{BCL} + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ACL}$

Ta có: $\triangle BCD = \triangle LCA$ (c-g-c) $\Rightarrow BD = AL$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB^2 + BC^2 = BD^2$

Bài 6: (2 điểm) Trên bảng là một con số. Hai bạn Nhân và Chia cùng chơi một trò chơi như sau: Bạn Nhân, khi đến lượt mình thì đem số trên bảng nhân với 2 và đem kết quả này thay cho số trên bảng; Bạn Chia, khi đến lượt mình đem số trên bảng cộng 1 rồi chia cho 2 và đem kết quả này thay cho số cũ. Ai ra được kết quả bằng 2015 thì người đó thắng. Nhân đi trước, Chia đi sau và sau 2016 lượt chơi (mỗi bạn chơi đúng 2016 lần) thì Chia thắng.

a) Hỏi số trên bảng lúc đầu là bao nhiêu?

Gọi x là số trên bảng.

Sau bước đi của Nhân, số mới là: $2x$

Sau bước đi của Chia, số mới là: $\frac{2x+1}{2} = x+0,5$

Như vậy sau 1 lượt chơi thì số trên bảng tăng lên 0,5.

Do đó sau 2016 lượt chơi số trên bảng là: $x+0,5 \cdot 2016 = x+1008$

Vậy $x = 1007$

b) Nếu Chia đi trước thì ai sẽ thắng.

Sau bước đi của Chia, số mới là: $\frac{x+1}{2} = 0,5x + 0,5$

Sau bước đi của Nhân, số mới là: $2(0,5x + 0,5) = x + 1$

Như vậy sau 1 lượt chơi thì số trên bảng tăng lên 1.

Do đó sau 1008 lượt chơi thì số trên bảng là: $1007 + 1008 = 2015$

Vậy Nhân sẽ là người thắng.

❁ ❁ **HẾT** ❁ ❁